

Matematika Mérnököknek 1.

Baran Ágnes

Gyakorlat
Komplex számok

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!
Ábrázolja a megoldásokat a komplex számsíkon!

(a)* $x^2 + 4 = 0$,

(c) $x^2 - x + 1 = 0$,

(b)* $x^2 + 2x + 2 = 0$,

(d) $x^3 - 6x^2 + 13x = 0$.

*2. Írja fel az alábbi komplex számok algebrai alakját!

(a) $(3 + i)(2 + 3i)$, $(-2 + 3i)(5 - 2i)$, $i(1 + 2i)$,
 $(-1 + i)(1 - 2i)(1 + 2i)$,

(b) $\overline{5 - 2i}$, $\overline{(3 + 4i)(2 + i)}$,

(c) $(2 - i)^3$, $i^6 + 3i^5 - 2i^3 + i^2 - 1$, i^{2008} , i^{103} ,

(d) $\frac{5 + 3i}{i}$, $\frac{1 - i}{2 + i}$, $\frac{1 - 2i}{1 - 3i}$, $\frac{2 - i}{(3 - 2i)(2 + 5i)}$.

3. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

(a)* $\bar{z} + 2z = 9 + 2i$,

(b) $\bar{z} + |z|^2 = 31 - i$,

(c) $i^3 \cdot \bar{z} = -3 - 2i$,

(d)* $z^2 + |z|^2 = 2 - 6i$,

(e) $\bar{z} \cdot z^2 = 8i$,

(f) $z^2 = i$.

*4. Ábrázolja a komplex számsíkon az alábbi halmazokat!

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\}$,

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = 0\}$,

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \leq 0\}$,

(d) $D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geq 2\}$,

(e) $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$,

(f) $F = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = \text{Im}(z)\}$.

5. Adja meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját!

(a)* 3,

(d)* $-4i$,

(g) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$,

(j) $\frac{5}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{3}i$,

(b) -2 ,

(e)* $2 + 2i$,

(h)* $-1 + \sqrt{3}i$,

(c) i ,

(f) $1 - i$,

(i) $-3 - 3\sqrt{3}i$,

(k) $\sqrt{3} - i$.

*6. Legyen $x = 3 \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right)$ és $y = 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)$. Határozza meg az alábbi kifejezések értékét!

(a) $x \cdot y$,

(b) $\frac{x}{y}$,

(c) x^3 ,

(d) y^5 ,

(e) $\frac{1}{x}$,

(f) x^2y .

7. Trigonometrikus alak segítségével határozza meg az alábbi kifejezések értékét!

(a)* \sqrt{i} ,

(c) $(2 + 2i)^{2008}$,

(b) $\sqrt[3]{i}$,

(d)* $(1 + \sqrt{3}i)^{301}$.

- *8. Számítsa ki a $z = 81 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)$ komplex szám második, harmadik, negyedik gyökeit! Ábrázolja a gyököket a komplex számsíkon!
9. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

(a)* $z^2 - 3iz + 4 = 0,$

(b)* $z^3 + z^2 + z = 0,$

(c) $z^5 - z = 0,$

(d) $z^2 + (2 + 4i)z - 3 + 3i = 0,$

(e) $2iz^2 + (4 + 5i)z + 5 = 0.$

Komplex számok Matlab-ban

- $1i$ a képzetes egység
- $z=1.5+2*1i$ a $z = 1.5 + 2i$ komplex szám
- $\text{real}(z)$ a z valós része
- $\text{imag}(z)$ a z képzetes része
- $\text{conj}(z)$ a z konjugáltja
- $\text{abs}(z)$ a z abszolút értéke

Ha z és w komplex számok, akkor

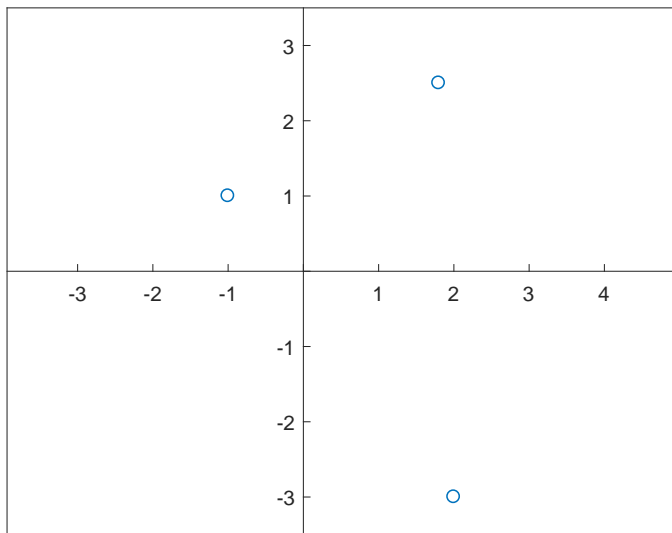
- $z+w$ az összegük
- $z-w$ a különbségük
- $z*w$ a szorzatuk
- z/w a hányadosuk

Megj.: A Matlab-ban az i és j változók értéke is alapértelmezés szerint $i = \sqrt{-1}$, de ez felülírható, ezért tanácsosabb az $1i$ változót használni.

Példa

Ábrázoljuk a $2 - 3i$, $-1 + i$, $1.8 + 2.5i$ komplex számokat a komplex számsíkon!

```
v=[2-3*1i, -1+1i, 1.8+2.5*1i];  
figure; plot(v,'o')  
axis([-1.5 2.5 -3.5 3.5])  
axis equal  
ax=gca;  
ax.XAxisLocation = 'origin';  
ax.YAxisLocation = 'origin';
```



for-ciklus

A kettőspont operátor

- az $a = (1, 2, 3, 4, 5)$ vektor:
 $a = 1:5$
- a $b = (5, 4, 3, 2, 1)$ vektor:
 $b = 5:-1:1$
- a $c = (2, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3)$ vektor
 $c=2:0.2:3$

Általában:

`x=elsoelem:lepeskoz:utolsoelem`

ahol a lépésköz negatív is lehet, vagy

`x=elsoelem:utolsoelem`

akkor a lépésköz 1.

for-ciklus

```
for ciklusváltozo=vektor  
    utasitasok  
end
```

Példák

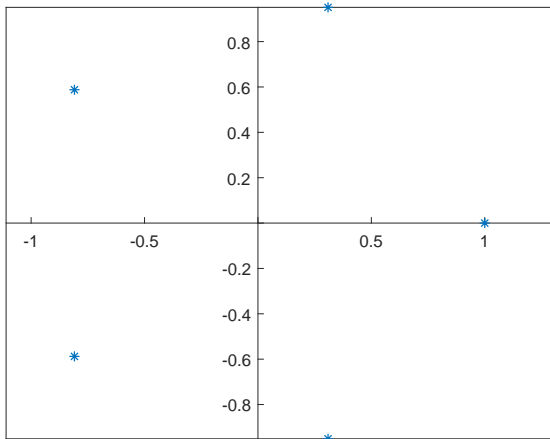
```
s=0;  
for i=1:100  
    s=s+i;  
end
```

```
s=100;  
for i=98:-2:2  
    s=s+i;  
end
```

Példa

Ábrázolja a komplex számsíkon az 5. komplex egységgyököket!

```
z=zeros(1,5);
for k=1:5
    alfa=2*(k-1)*pi/5;}
    z(k)=cos(alfa)+1i*sin(alfa);
end
figure; plot(z,'*')
axis equal
ax=gca;
ax.XAxisLocation = 'origin';
ax.YAxisLocation = 'origin';
```



Függvények írása

A Matlab-függvények szerkezete:

```
function kimenovaltozok=fvneve(bemenovaltozok)
    utasitasok
end
```

Fontos! A fenti függvényt fvneve.m néven kell elmenteni.

Példák.

```
function y=masodf(x)
    y=2*x.^2-3*x+5;
end
```

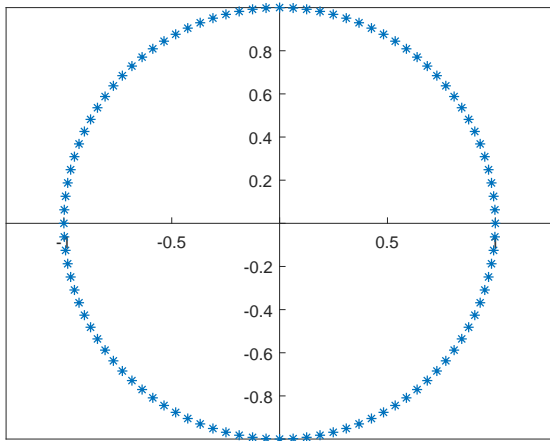
Ekkor a $y=masodf(x)$ utasítás eredménye a $2x^2 - 3x + 5$ kifejezés értéke, ahol x akár vektor is lehet, ebben az esetben a függvény elemenként hajtódik végre és y is vektor (ezt az teszi lehetővé, hogy a fv-ben minden művelet végrehajtható vektorokra is, mivel a négyzetreemelés jele elé kitettük a $.$ jelet)

Példa

Írjon egy Matlab-függvényt, mely adott n esetén előállítja és ábrázolja az n -edik komplex egységgyököket!

```
function z=egyseg(n)
    z=zeros(1,n);
    for k=1:n
        alfa=2*(k-1)*pi/n;
        z(k)=cos(alfa)+1i*sin(alfa);
    end
    figure; plot(z,'*')
    axis equal
    ax=gca;
    ax.XAxisLocation = 'origin';
    ax.YAxisLocation = 'origin';
```

```
>> egyseg(100)
```



Feladat

Ábrázolja a $z = 1 + 1.2i$ komplex szám első 5 hatványát!

Feladat

Írjon egy Matlab-függvényt, mely adott z komplex szám és n természetes szám esetén kiszámolja és ábrázolja a z első n hatványát!